~ CURS 2 ~

C. <u>Condensatorul electric</u>

Considerând dielectricul condensatorului perfect izolant, legea conservării sarcinii electrice conduce la relaţia dintre intensitatea curentului electric de conducţie şi sarcina electrică sub forma ecuaţiei de evoluţie:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.25}$$

Integrată pe intervalul $(0,t)$, ecuaţia (1.25) conduce la

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau\,; \quad q(0) = \int_{-\infty}^0 i(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.26}$$

Relaţia (1.26) numită ecuaţia de ereditate a condensatorului, arată că sarcina electrică la momentul t, depinde de valorile anterioare ale curentului; prin urmare, condensatorul este un element cu memorie.

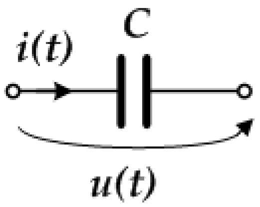

Fig. 1.8. Simbolizarea condensatorului

Condensatorul liniar, invariabil în timp (fig. 1.8) are ecuaţia caracteristică:

$$q(t) = C \cdot u(t) \tag{1.27}$$

unde $C > 0$ este <u>capacitatea</u> măsurată în farazi $[F]$.

În planul (q, u) ecuaţia (1.27) reprezintă o dreaptă ce trece prin origine, deci sarcina electrică şi tensiunea au aceeaşi formă de variaţie în timp.

Ţinând seama de (1.27), ecuaţia (1.25) devine:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.28}$$

din care, prin integrare pe intervalul $(0,t)$ rezultă

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau\,; \quad u(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^0 i(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.29}$$

Condensatorul liniar şi invariabil în timp este complet determinat de capacitatea C și de tensiunea iniţială $u(0)$.

Înmulţind ecuaţia (1.28) cu $u\mathrm{d}\tau$ şi integrând pe intervalul $(0, t)$ în ipoteza $u(0) = 0$, se obţine energia acumulată în câmpul electric al condensatorului în acest interval:

$$W_e = \int_0^t i(\tau)\cdot u(\tau)\mathrm{d}\tau = C\int_0^t u(\tau)\cdot u'\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{1}{2}q(t)\cdot u(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2(t)}{C} \tag{1.30}$$

D. *Sursa de tensiune*

Sursa ideală independentă de tensiune (Fig.1.9a) este un element activ de circuit având următoarea ecuaţie caracteristică:

$$u(t) = e(t), \quad \forall i \tag{1.31}$$

În planul (u, i) caracteristica de funcţionare este o dreaptă paralelă cu axa curentului (1.9b).

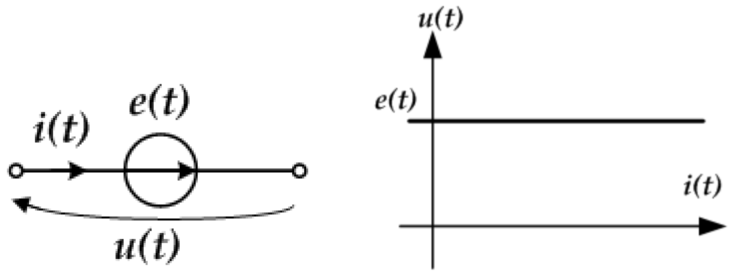

Fig. 1.9. Simbolizarea şi caracteristica sursei ideale de tensiune

Puterea cedată de sursa de tensiune circuitului extern este:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = e(t) \cdot i(t) \tag{1.32}$$

Relaţia (1.31) arată că nu putem conecta în paralel (între aceleaşi borne) surse ideale de tensiune cu valori diferite ale tensiunilor electromotoare.

Dacă elementul de circuit degajă căldură prin efect electrocaloric, adică are rezistență internă $(R \neq 0)$, ecuația sa este:

$$u = e - R \cdot i \tag{1.33}$$

Un astfel de element se numeşte ***sursă reală de tensiune*** (Fig. 1.10a). Caracteristica de funcţionare este o dreaptă care nu trece prin origine (Fig. 1.10b).

Înmulţind relaţia (1.33) cu $i(t)$, se obține puterea electrică cedată la borne de sursă:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = e(t) \cdot i(t) - R \cdot i^2(t) \tag{1.34}$$

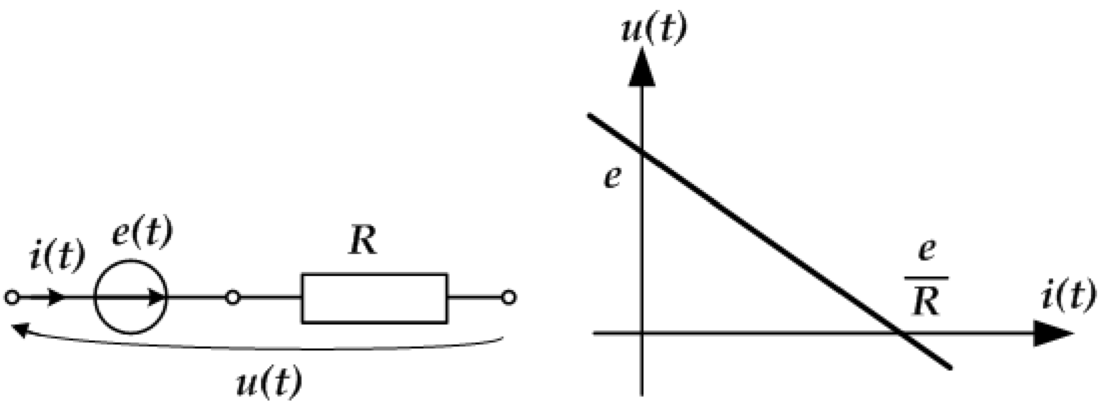

Fig. 1.10. Simbolizarea şi caracteristica sursei reale de tensiune

E. *Sursa ideală de curent*

Sursa ideală independentă de curent (Fig. 1.11a) este o sursă de energie electromagnetică având proprietatea de a debita un curent *j*(t) independent de reţeaua conectată la bornele ei. Ea nu este influenţată de tensiunea la borne determinată de circuitul extern, astfel încât ecuaţia caracteristică a elementului este:

$$i(t) = j(t), \qquad \forall u \tag{1.35}$$

În planul (u,i) caracteristica este o dreaptă paralelă cu axa tensiunii (Fig. 1.11b).

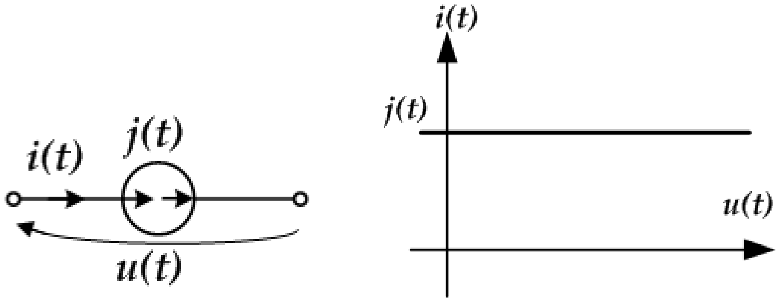

Fig. 1.11. Simbolizarea şi caracteristica sursei ideale de curent

Relaţia (1.35) arată că nu putem conecta în serie (pe aceeaşi latură) surse de curent cu valori diferite ale curenţilor injectaţi.

Puterea cedată de sursă circuitului extern este

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot j(t) \tag{1.36}$$

Schema echivalentă a unei surse reale de curent este prezentată în figura 1.12a, iar ecuaţia de funcţionare este:

$$i = j - G \cdot u \tag{1.37}$$

Înmulţind relaţia (1.37) cu u(t) se obţine puterea electrică cedată la borne de sursă:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot i(t) - G \cdot u^2(t) \tag{1.38}$$

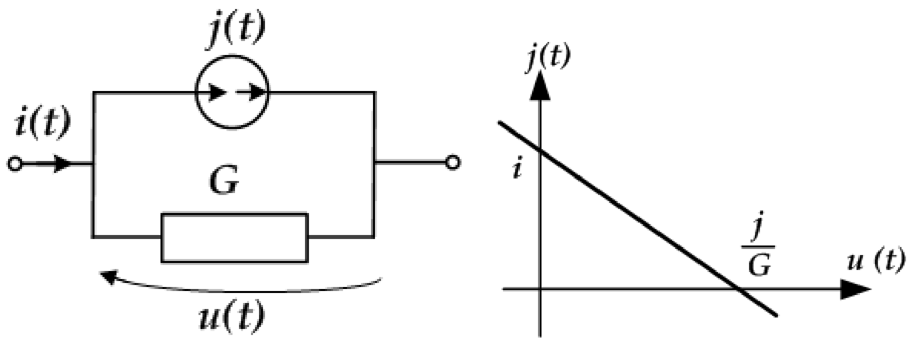

Fig. 1.12. Simbolizarea şi caracteristica sursei reale de curent

I.4. Circuite electrice - generalităţi

Circuitul electric este o mulţime de elemente de circuit interconectate între ele. **Elementul de circuit** este un domeniu ce are legătură electrică cu exteriorul doar printr-un număr finit de puncte numite *borne*.

Rezolvarea corectă a unui circuit implică un lanţ de operaţii care încep cu identificarea *elementelor de topologie ale unui circuit electric*. În această situaţie, circuitului electric i se asociază un graf (fig. 1.13), pe care se identifică următoarele:

- **nod =** punctul de intersecţie a minim trei conductoare. Numărul nodurilor dintr-un circuit se notează cu N;
- **latură =** porţiunea din graf cuprinsă între două noduri. Totalitatea laturilor din circuit se va nota cu L;
- **bucla** = orice succesiune de laturi ale grafului ce formează un contur închis, care parcurge orice nod cel mult o dată. Numărul de bucle independente din circuit se notează cu B. O bucla netraversată de vreo latură poartă denumirea de **ochi**.

Se poate introduce o relaţie de legătură între aceste elemente de topologie, numită relaţia lui Euler:

$$B = L - N + 1 \tag{1.39}$$

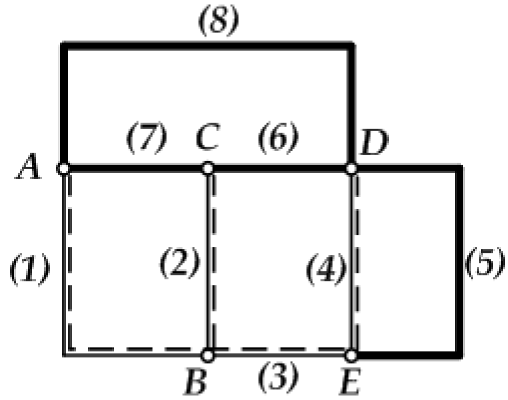

Fig. 1.13. Exemplu de graf asociat unui circuit electric

I.5. Teoremele generale ale teoriei circuitelor electrice

A. *Prima teoremă a lui Kirchhoff*

În regim cvasistaţionar legea conservării sarcinii electrice pentru o suprafaţă închisă (Σ) care înconjoară un nod oarecare (n_j) al circuitului, intersectează toate conductoarele laturilor $l_k \in n_j$ şi nu trece prin dielectricii condensatoarelor, conduce la relaţia:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt} = 0 \tag{1.40}$$

Dacă se atribuie semnul (+) curenţilor care ies din nodul (n_j) (au sensul de referinţă acelaşi cu al normalei $\overline{n}_\Sigma$) și semnul (-) celor care intră în nod, relaţia (1.40) conduce la:

$$\sum_{k \in n_i} i_k = 0 \tag{1.41}$$

Relaţia (1.41) reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff, care se enunţă astfel: *suma intensităţilor curenţilor laturilor concurente într-un nod este zero, dacă toţi curenţii sunt definiţi cu sensuri de referinţă la fel orientate faţă de nod*.

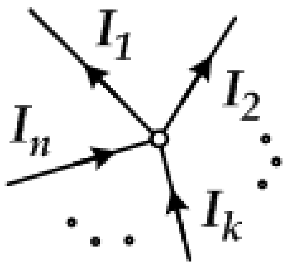

Fig. 1.14. Aplicarea teoremei I Kirchhoff

Spre exemplu:

Pentru figura 1.14, din scrierea primei ecuaţii Kirchhoff rezultă:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0 \qquad (1.42)$$

B. <u>A doua teoremă a lui Kirchhoff</u>

Aplicând legea inducţiei electromagnetice pe conturul (□), în ipoteza localizării câmpului magnetic numai în bobine (având o valoare nulă în afara elementelor de circuit) se obţine:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} = 0 \qquad (1.43)$$

Descompunând curba închisă (Γ) într-o sumă de curbe deschise ce urmăresc liniile tensiunilor la bornele laturilor l_k ce formează bucla (b_h) a circuitului, relaţia (1.37) conduce la:

$$\sum_{k \in b_h} u_k = 0 \qquad (1.44)$$

relaţie ce reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff: *suma tensiunilor electrice orientate în acelaşi sens pe laturile unei bucle este nulă*.

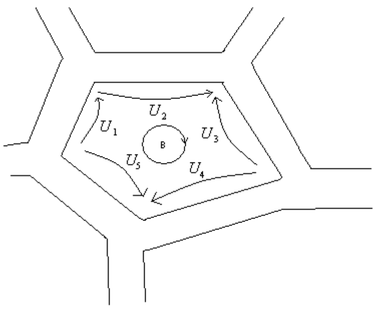

Fig.1.15. Aplicarea teoremei II Kirchhoff

Spre exemplu:

Pentru figura 1.15, din scrierea celei de a doua ecuaţii Kirchhoff rezultă:

$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0 \qquad (1.45)$$

C. <u>Teorema conservării puterilor</u>

Într-un circuit electric izolat, se poate obţine relaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot i_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \qquad (1.46)$$

Relaţie ce poartă denumirea de teorema conservării puterilor instantanee: *Suma algebrică a puterilor primite de elementele sale componente ale unui circuit izolat este egală cu zero*.

I.6. Circuite electrice de curent continuu

Circuitele de curent continuu sunt circuite în care mărimile de excitaţie (intensităţile curenţilor şi tensiunile electrice sunt constante în timp. Circuitele în curent continuu sunt rezistive deoarece bobinele şi condensatoarele în curent continuu nu intervin prin parametrii lor caracteristici, având un comportament particular:

- dacă curentul ce parcurge bobina este continuu (constant) $i_L = I$ pentru $t \in (-\infty;\infty)$, ecuaţia caracteristică a bobinei devine $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$, deci bobina se comportă în curent continuu ca un scurtcircuit ($R = 0$).
- dacă tensiunea la bornele condensatorului este continuă (constantă) $u_C = U$ pentru $t \in (-\infty;\infty)$, ecuaţia caracteristică a condensatorului devine $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, deci condensatorul se comportă în curent continuu ca un gol ($R \to \infty$).

<u>OBS</u>: Cu toate aceste bobina parcursă de curentul constant I acumulează energie magnetică $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2$, iar condensatorul cu tensiunea la borne U acumulează energie electrică $W_e = \dfrac{1}{2}CU^2$.

Relaţiile care stau la baza rezolvării circuitelor în curent continuu sunt:

- legea lui Ohm: $U = RI - E$; (1.47)
- prima teoremă a lui Kirchhoff: $\sum_{k\in \mathrm{n}_i} I_k = 0$; (1.48)
- a doua teoremă a lui Kirchhoff: $\sum_{\mathrm{k}\in \mathrm{b_h}} U_k = 0$. (1.49)

De cele mai multe ori, în aplicaţii, a doua teoremă a lui Kirchhoff se foloseşte în forma:

$$\sum_{\mathrm{k}\in \mathrm{B_h}} \left(R_\mathrm{k} \cdot I_\mathrm{k} + U_{\mathrm{J_k}}\right) = \sum_{\mathrm{k}\in \mathrm{B_h}} E_\mathrm{k} \quad (1.50)$$

Verificarea soluţiei unui circuit de curent continuu se face cu ajutorul teoremei conservării puterilor, care este folosită sub denumirea de bilanţul puterilor:

Enunţ: *Suma puterilor consumate prin efect electrocaloric ireversibil în rezistoarele unui circuit electric izolat (<u>putere consumată</u>) este egală cu suma algebrică a puterilor cedate de sursele de energie electrică (surse de tensiune şi surse de curent) din acelaşi circuit (*putere generată*)*:

$$P_\mathrm{c} = P_\mathrm{g} \quad (1.51)$$

$$P_\mathrm{c} = \sum_\mathrm{k} R_\mathrm{k} \cdot I_\mathrm{k}^2 \quad (1.52)$$

$$P_g = \sum_\mathrm{k} \left(E_\mathrm{k} \cdot I_\mathrm{k} + U_{\mathrm{J_k}} \cdot J_\mathrm{k}\right) \quad (1.53)$$

<u>OBS</u>: Bilanţul puterilor este valabil dacă pentru rezistoare s-a folosit regula de la receptoare pentru asocierea sensului tensiunii şi curentului, iar pentru sursele de energie, regula de la generatoare.

Algoritmul de aplicare a teoremelor lui Kirchhoff în rezolvarea problemelor

Pasul 1: Se determină numărul nodurilor şi laturilor din circuit;

Pasul 2: Se aleg sensurile de referinţă ale curenţilor prin laturile circuitului şi, respectiv, ale tensiunilor la bornele surselor de curent (conform regulii de asociere de la generator);

Pasul 3: **Pentru un număr *N-1* de noduri** se vor scrie ecuaţiile primei teoreme a lui Kirchhoff (relaţia (1.48)).

Pasul 4: Se vor scrie pentru sistemul fundamental de bucle ales (cărora li s-a indicat şi un sens de parcurgere) **B**=*L*-*N*+*1* **ecuaţii** ale teoremei a doua a lui Kirchhoff (relaţia (1.50)).

Pasul 5: Se rezolvă sistemul format de *L* ecuaţii cu *L* necunoscute (curenţii din laturi şi tensiunile la bornele surselor de curent).

Pasul 6: Se verifică bilanţul puterilor (relaţiile (1.51)-(1.53)).